形状最適化におけるベーシスベクトル法の適用問題

Application Problem of Basis Vector Method in Shape Optimization

○ 正 趙　希禄（富士テク）　中村 和彦（富士テク）
遠藤 正司（富士テク）　名取　孝（富士テク）

Xilu ZHAO, Fuji Technical Research Inc., Tenno-cho, Hodogaya-ku, Yokohama
Kazuhiko NAKAMURA, Fuji Technical Research Inc.
Masashi ENDOU, Fuji Technical Research Inc.
Takashi NATORI, Fuji Technical Research Inc.

Applying the basis vector method to complicated shape optimization problem is examined that it is effective things. But, when actually calculating shape optimization problem or in real optimization system development, many application problems exist yet. In this paper, a flexible basis vector method is applied to the optimization of 3D structure. And examined some problems such as: how to control inside substructures when the boundary shape is changed; how to check the independence of basis vector to each other; and the re-meshing problem when the shape variable is changed. Then proposed calculation algorithm, respectively. In the numerical example, an optimization problem of structure is calculated, the result verify out validity of present methods.

Key Words: Shape Optimization, Basis Vector Method, And Structure Optimal Design

従来の形状最適化では，直接に節点座標または節点座標グループを設計変数とする。複雑な形状変更の定義と表現するには，直接に境界節点を移動する方法，境界を表す既知関数の組合せによる方法，要素パターンを変更する方法，逆変分原理による方法などを用いるが，最適化計算サイクルの中で関連する形状パラメータを調整して構造形状を修正する。しかし，これらの方法を使って実際の設計問題を計算する時に，設計変数のグルーピングや解析メッシュのリメッシングなどの問題が存在している。複雑な形状最適化問題が対応でき，幅広く使われる方法はまだ確立していない。

最近，構造形状最適化には基本形状変更ベクトルをベースとしたベーシスベクトル法を提案された。実際に扱う形状最適化問題に適用するベーシスベクトル法は，通常の設計業務に近い考え方を用い，事前に設計者から加工条件や他の部品との組立関係などを考慮したうえで，幾つかの基本形状変更パターン及び変更範囲を設定する。それから，各基本形状にそれぞれ重み係数を掛けたうえで足し合わせる方法で新しい構造形状を形成する。最適化計算中，各重み係数をそのまま設計変数にし，数理計画法などの最適化手法を用い最適な重み係数を求めることによって最適な構造形状を求めることができる。ここでは，各基本形状パターンは同様な位相構成をもつ節点座標ベクトルの形で数式的に表現されたので，この手法はベーシスベクトル法を呼ばれる。

しかし、ベーシスベクトル法を実際的な三次元構造の形状最適化問題に応用する際に，外部境界形状の変化に伴い内孔や凸凹などの内部形状の従属移動，複数の基本形状がある場合で各ベーシスベクトルの間に依存すべき関係や，形状変更に伴う要素チェックとリメッシングなどの問題が，まだ十分に解決できず多数存在している。

本文では，形状最適化問題にベーシスベクトル法を適用する際に，幾つかの応用問題を取扱い詳細な検討を行い，これからのベーシスベクトル法を幅広く形状最適化問題に利用する指針を提供する目的と考える。

まず，形状最適化問題に使用するベーシスベクトル法の概要を述べる。ベーシスベクトル法はベーシスベクトルの作成、ベーシス形状により設計形状を表現するとベーシスベクトル係数を調整することによって最適な形状を求めるの３つの部分から構成される。

次に，複数のベーシスベクトルが混在する場合に，各ベーシスベクトルの間に存在すべき独立関係とその重要性について検討し，数式的にベーシスベクトルの独立性をチェックする方法を提案した。

通常に設計対象とする構造の外部境界形状の変化にともない，構造内部にある穴や凸凹など内部形状の従属変動に対するさまざまな要求がよく見られる。これらの問題を解決するために，ベーシス形状変換過程において，幾何学形状の基本となる任意２点からなる線分，任意３点座標の間に存在する比例関係と任意３点からなる角度値の変化規則について検討を行った。

また，形状最適化における外部境界形状が変化する時に，繰返し構造解析を正常に行われるために，内部にある解析メッシュを適当に調整する，いわゆるリメッシング問題について，実用的な立場から解決策を検討した。

最後に，提案した方法の妥当性を検証するため，内孔がある板組立構造の形状最適化問題を例として解析を実施した。その結果，すべての制約条件を満足した上で，設計目的を達成した構造を求められた。最適形状では，事前に与えた外部形状の変化より，内孔位置及び寸法への従属要求がすべて満たした。さらに各基本形状の解析メッシュを検査して特に問題なければ，反復計算が正常に続けられることが解った。

本文は三次元形状最適化にベーシスベクトル法を適用する際に，ベーシスベクトルの独立性検査方法，外部境界形状の変化に伴い内部形状のコントロールおよびリメッシング問題などについて詳細な検討を行った。また，数値例の結果によって提案したアルゴリズムの有効性を明らかにした。

１．はしがき

最近，設計期間の短縮や設計コストの削減を目指し，構造最適設計に関する研究は大幅に進んでおり，数々の研究論文や報告が発表された[1],[2]。最適化の設計変数により，構造最適化問題を寸法最適化，形状最適化と位相最適化に分類されている。

寸法最適化は，設計変数がシェルの板厚や，梁の断面積と慣性モーメントなどを含む。その最大な特徴は反復計算過程において，解析メッシュの変化はなく，設計変数が要素剛性マットリックスと陽的な関係があるので，感度計算は比較的容易に実現することができる。そのゆえ，八十年代から数理計画法と組合せた寸法最適化が盛んに行われていたが，応用範囲に制限があり，解決できる最適化問題は限られる。

位相最適化は，解析モデルの形態構成（位相構成）を直接に設計変数とする。荷重点から拘束点まで部材配置や空孔分布などを設計対象として最適化する。ほとんどの場合は，位相最適化を意匠設計または初期設計段階にしか使われないと言われている。

形状最適化は，解析モデルの位相関係を変化せずに，直接構造形状パラメータを設計変数とする。すなわち最適化過程では，解析モデルの要素データを維持したまま，節点座標データだけを変化させることによって構造形状を変える。設計現場の問題としては，機械仕様，設計規格や他の部品との組立関係などより構造形態がほとんど決められ，詳細な形状寸法のみを決定する設計問題が多く占められているので，形状最適化に関する研究は続けられ，もっとも頻繁に使われる最適化技術である。

従来の形状最適化では，直接に節点座標または節点座標グループを設計変数とする。複雑な形状変更の定義と表現するには，直接に境界節点を移動する方法，境界を表す既知関数の組合せによる方法，要素パターンを変更する方法，逆変分原理による方法などを用いているが，最適化計算サイクルの中で関連する形状パラメータを調整して構造形状を修正する。しかし，これらの方法を使って実際の設計問題を計算する時に，設計変数のグルーピングや解析メッシュのリメッシングなどの問題が存在している。複雑な形状最適化問題が対応でき，幅広く使われる方法はまだ確立していない。

最近，構造形状最適化には基本形状変更ベクトルをベースとしたベーシスベクトル法を提案された[3],[4]。実際に扱う形状最適化問題に適用するベーシスベクトル法は，通常の設計業務に近い考え方を用い，事前に設計者から加工条件や他の部品との組立関係などを考慮したうえで，幾つかの基本形状変更パターン及び変更範囲を設定する。それから，各基本形状にそれぞれ重み係数を掛けたうえで足し合わせる方法で新しい構造形状を形成する。最適化計算中，各重み係数をそのまま設計変数にし，数理計画法などの最適化手法を用い最適な重み係数を求めることによって最適な構造形状を求めることができる。ここでは，各基本形状パターンは同様な位相構成をもつ節点座標ベクトルの形で数式的に表現されたので，この手法はベーシスベクトル法を呼ばれる。

しかし，ベーシスベクトル法を実際的な三次元構造の形状最適化問題に応用する際に，外部境界形状の変化に伴い内孔や凸凹などの内部形状の従属移動，各ベーシスベクトルの間に依存すべき独立関係や，外部形状変更に伴う要素チェックとリメッシングなどの問題が，まだ十分に解決できず多数存在している[5]。

本文では、三次元形状最適化問題にベーシスベクトル法を適用する際に，幾つかの応用問題を取扱い，詳細な検討を行ったうえで，それぞれ対策と計算アルゴリズムを与える。また，数値計算例を使って提案した方法の妥当性と有効性を検証する。

２．形状最適化のベーシスベクトル法

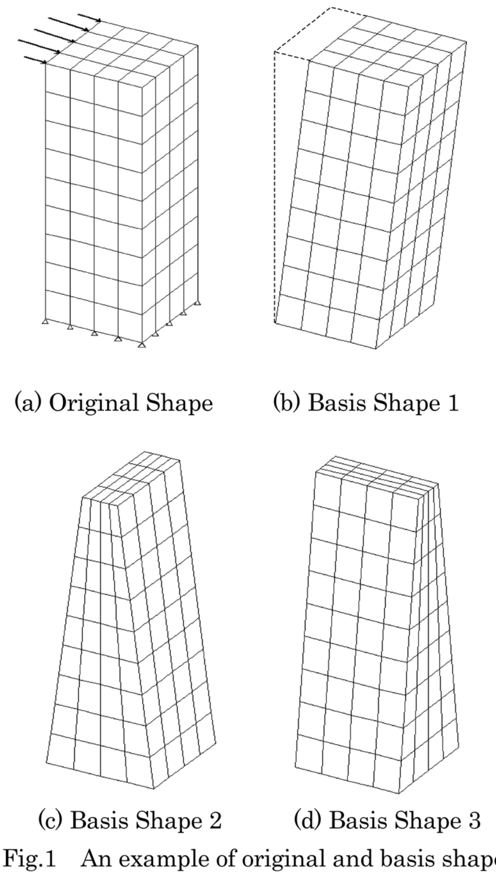
形状最適化には，形状変更の候補であるベーシスベクトルを用い，複数のベーシスベクトルの線形結合により形成された線形空間から最適な形状を求める。

具体的な計算手順は，次の３つの部分から構成される。

（１）ベーシスベクトルの作成　形状変更を表現するには，幾つかの基本形状変更パターンを設定する必要がある。計算上，各基本形状変更パターンを節点座標グループで表される。図１の例では，図(a)はオリジナル形状，図(b)～(d)はそれぞれ基本形状１～３を示す。ここでは，ベクトル α_0，α_1，α_2，α_3 を導入し，オリジナル形状と各基本形状のもつ節点座標を同じ順番で並べたベクトルを示す。実際の最適化計算では，各基本形状ベクトルとオリジナル形状ベクトルの差

$$(\alpha_1-\alpha_0)\ 、(\alpha_2-\alpha_0)\ 、(\alpha_3-\alpha_0)$$

を使い，各基本形状変更パターンを表される。



(a) Original Shape　(b) Basis Shape 1

(c) Basis Shape 2　(d) Basis Shape 3

Fig.1　An example of original and basis shapes

（２）ベーシス形状により設計形状を表す　各ベーシスベクトルで表された基本形状にそれぞれ重み係数をかけて組合せることにより

$$\alpha = w_0\alpha_0 + w_1\alpha_1 + w_2\alpha_2 + w_3\alpha_3 \qquad ......(1)$$

様々な設計形状を形成することができる。ただし，各ベーシスベクトルでの同じ値をもつ節点座標に対して変換された節点座標が同じ値をもつ要求に従い，各重み係数に関係

$$w_0 + w_1 + w_2 + w_3 = 1 \qquad ....(2)$$

が存在すべきである。式（２）を式（１）に代入して，実際に形状変換に使われる計算式が得られる。

$$\alpha = \alpha_0 + w_1(\alpha_1 - \alpha_0) + w_2(\alpha_2 - \alpha_0) + w_3(\alpha_3 - \alpha_0) \quad ..(3)$$

ここでは，α は形成される設計形状の節点座標ベクトル，α_0 はオリジナル形状ベクトル，α_i はベーシスベクトルである。w_i は各ベーシスベクトルに掛ける重み係数であり，その幾何学意味は設計形状の中に対応する基本形状の採用比率である。例えば，もし $w_1 = 0$，$w_2 = 0$，$w_3 = 0$，すなわち各ベーシスベクトルの採用比率はすべて 0%であれば，形状変換式（３）により $\alpha = \alpha_0$ が得られ，設計形状は初期形状と一致する。もし $w_1 = 0$，$w_2 = 1$，$w_3 = 0$，すなわちベーシスベクトル２の採用比率は 100%，他の採用比率が 0%であれば，形状変換式（３）により $\alpha = \alpha_2$ が得られ，設計形状は基本形状２と一致する。もし $w_1 = 0.5$，$w_2 = -1$，$w_3 = 0.15$，すなわち各ベーシスベクトルの採用比率はそれぞれ 50%，－100%，15%であれば，形状変換式（３）により，それに対応する設計形状が計算できる。ただし，計算中での各ベーシスベクトル α_0，α_1，α_2，α_3 は形状変更基準として常に変えてはならない。

（３）最適な形状を求める　形状変換式（３）に含まれる各ベーシスベクトルに掛けた重み係数 w_i を直接に設計変数として，数理計画法などの最適化手法を用い，ある設計目的を達成するように最適な重み係数の組合せを求めて，それから最適な重み係数を式（３）に代入して，最適な形状を求めることが出来る。

以上に検討したベーシスベクトルに基づき基本形状定義および形状変換方法はベーシスベクトルの個数と関係なく適用できる。また，重み係数 w_i は連続変数であるので，式（３）で形成される形状の数は無限にあることが考えられる。

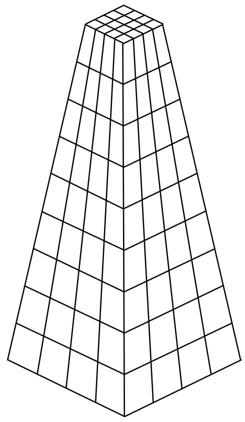


Fig.2　The new basis shape with leaner relationship of other

３．ベーシスベクトルの独立性検査

形状変換式（３）を使い最適形状を求めるときに，任意の重み係数 w_i の組合せに対して，計算し求めた形状ベクトルは各ベーシスベクトルの線形結合と考えられる。

図１の例では，３つのベーシスベクトルを用いた形状最適化をする場合で正しく最適解が求められる。しかし，図２に示す形状を新しいベーシスベクトル α_4 として追加して，４つのベーシスベクトルを用いた形状最適化をする場合は，最適化計算は収束しにくくなり，場合により最適解が求められない可能性も出てくる。

その理由としては，図１(c)と(d)のベーシスベクトル α_2 と α_3 を足し合わせて，ちょうど図３の形状ベクトル α_4 になる。即ち，ベクトル α_4 は他のベーシスベクトル α_1、α_2、α_3 の線形結合で表される。それに起因して，設計変数の間に線形結合関係が生じたので，互いに直交する関係をもつ設計感度は求められなく，最適な探索方向の唯一性が存在しなくなる。そのゆえ，最適化反復計算は不安定状態になり，計算上の振動現象が起こったり，収束しなかったりすることがよく見られる。しかし，各ベーシスベクトルの独立性が失った場合，必ず反復計算が収束しないとは限らず，計算データにより偶然に反復計算が収束できる計算例もあるが，ただし，この時の最適形状には基本形状採用比率の意味が不明になる可能性がある。

この問題を避けるため，事前に作っておいた各ベーシスベクトルの互いに存在する独立性を検査する必要がある。

ベーシスベクトルは単純な節点座標ベクトルであるので，Gauss 初等変換法でベクトル同士の独立性をチェックすることができる。まず，式（２）を変形する

$$w_1(\alpha_1 - \alpha_0) + w_2(\alpha_2 - \alpha_0) + w_3(\alpha_3 - \alpha_0) = \alpha - \alpha_0$$

次に，上式の右辺を０とし，マトリックス形に書き直す

$$[(\alpha_1 - \alpha_0), (\alpha_2 - \alpha_0), (\alpha_3 - \alpha_0)]\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = 0 \qquad ...(3)$$

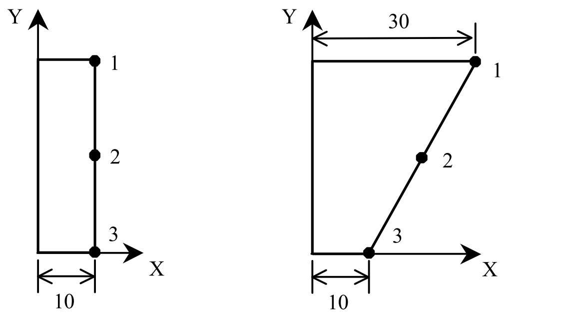
ここでは，係数マトリックスに対して，Gauss 初等変換を行い，対角要素が０でない個数を，検査するベーシスベクトル数と比較して，もし双方の個数が一致すれば検査するベーシスベクトルは一次独立しているが，逆に対角要素が少ない場合は独立性が存在しない。

図３に示す簡単な例に対して，上記の方法で各ベーシスベクトルの独立性を検査する。

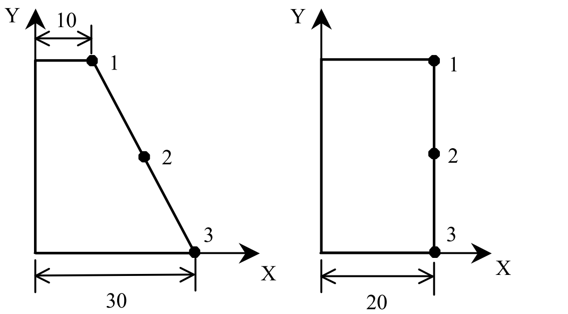
まず，ベーシスベクトル α_1 と α_2 からなる係数マトリックスに対して Gauss 初等変換を行った結果は

$$[(\alpha_1 - \alpha_0), (\alpha_2 - \alpha_0)] = \begin{bmatrix} 0 & 20 \\ 10 & 10 \\ 20 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



(a) Original $\alpha_0 = \{10,10,10\}^T$　(b) Basis 1 $\alpha_1 = \{10,20,30\}^T$



(c) Basis 2 $\alpha_2 = \{30,20,10\}^T$　(d) Basis 3 $\alpha_3 = \{20,20,20\}^T$

Fig.3 An example for independence of basis vectors

となり，非零対角要素とベーシスベクトルの個数が共に２であるので，α_1 と α_2 は独立性をもつことを示している。

一方，ベーシスベクトル α_1 、α_2 と α_3 からなる係数マトリックスに対して Gauss 初等変換を行った結果は

$$[(\alpha_1 - \alpha_0), (\alpha_2 - \alpha_0), (\alpha_3 - \alpha_0)] = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \\ 20 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となり，非零対角要素の２に対してベーシスベクトルの個数は３であるので，α_1 、α_2 と α_3 は独立性を持っていないことを示している。

４．構造内部形状の従属変動

実際の形状最適化問題では，通常に設計対象とする構造の外部境界形状の変化にともない，構造内部にある内孔や凸凹などを，外部境界形状の寸法とある比例関係を保ちつつ大きさあるいはその位置関係を変えるか？外部境界形状の変化を無視し常に一定の大きさあるいは位置関係を維持するか？すなわち外部境界形状の変化に伴い内部形状の従属変動に対するさまざまな要求がよく見られる。

これらの問題を解明するために，ここでは形状変換において，任意２点からなる線分，任意３点座標の比例関係と任意３点からなる角度の変化について検討を行う。

４.１　ベーシス形状変換による線分の変化

構造内部にある任意２点 a，b を考え，オリジナル形状、基本形状および変換した新しい形状における a 点から b 点までの方向ベクトルを

$$\overrightarrow{a_0 b_0} = \{x_{b0} - x_{a0}, y_{b0} - y_{a0}\}^T \qquad \text{......(４)}$$

$$\overrightarrow{a_1 b_1} = \{x_{b1} - x_{a1}, y_{b1} - y_{a1}\}^T \qquad \text{......(５)}$$

$$\overrightarrow{ab} = \{x_b - x_a, y_b - y_a\}^T \qquad \text{......(６)}$$

とする。重み係数 w_0 、w_1 に関する形状変換を考え

$$\overrightarrow{ab} = \{(w_0 x_{b0} + w_1 x_{b1}) - (w_0 x_{a0} + w_1 x_{a1}),$$

$$(w_0 y_{b0} + w_1 y_{b1}) - (w_0 y_{a0} + w_1 y_{a1})\}^T$$

に表される。式（４）、（５）を考慮しまとめると，上式は

$$\overrightarrow{ab} = w_0 \overrightarrow{a_0 b_0} + w_1 \overrightarrow{a_1 b_1} \qquad \text{......(７)}$$

となる。式（７）より，構造内部にある任意２点からなる方向ベクトルは，形状変換式との同じ重み係数に関する線形結合関係をもつことが解った。

線分 ab の変化を調べるため，式（７）の両端に自乗して

$$\left|\overrightarrow{ab}\right|^2 = w_0{}^2 \left|\overrightarrow{a_0 b_0}\right|^2 + w_1{}^2 \left|\overrightarrow{a_1 b_1}\right|^2 + 2 w_0 w_1 \left|\overrightarrow{a_0 b_0}\right| \left|\overrightarrow{a_1 b_1}\right| \cos\theta$$

が得られる。ここで，θ はベクトル $\overrightarrow{a_0 b_0}$ と $\overrightarrow{a_1 b_1}$ が挟む角度である。この式を使い形状変換した線分長を計算することができる。その特例として，ベーシスベクトルは平行となる時に，$con\theta = 1$ ので，上式は

$$\left|\overrightarrow{ab}\right|^2 = w_0{}^2 \left|\overrightarrow{a_0 b_0}\right|^2 + w_1{}^2 \left|\overrightarrow{a_1 b_1}\right|^2 + 2 w_0 w_1 \left|\overrightarrow{a_0 b_0}\right| \left|\overrightarrow{a_1 b_1}\right|$$

となる。線分長を表すことを考え

$$\left|\overrightarrow{ab}\right| = w_0 \left|\overrightarrow{a_0 b_0}\right| + w_1 \left|\overrightarrow{a_1 b_1}\right| \qquad \text{......(８)}$$

が得られる。式（８）より，各基本形状における線分が平行する場合，形状変換した線分長は各線分に重み係数を掛けて足し合せる方法で計算できる。

さらに，各基本形状における線分が平行し，かつ線分長が一致する場合，$\left|\overrightarrow{a_0 b_0}\right| = \left|\overrightarrow{a_1 b_1}\right|$ を式（８）に代入して

$$\left|\overrightarrow{ab}\right| = (w_0 + w_1) \left|\overrightarrow{a_0 b_0}\right|$$

また，$w_0 + w_1 = 1$ を代入して

$$\left|\overrightarrow{ab}\right| = \left|\overrightarrow{a_0 b_0}\right| \qquad \text{......(９)}$$

が得られる。つまり，この場合は形状変換した線分長は重み係数と関係なく常にオリジナル線分長を保持する。

式（９）を利用して，設計対象の要求に合わせて，各基本形状において，内孔や凸凹などを同じ形状に，ある特定点から境界までの距離を同じ長さに設定しておけば，任意の重み係数の組合せに変換されても，オリジナル内部形状のもつ性

質は常に保持することができる。

４.２　ベーシス形状変換による座標比例関係の保持

構造内部における任意３節点ａ，ｂ，ｃのｘ座標を例として検討する。ここで，オリジナル形状と各ベーシス形状における３節点ａ，ｂ，ｃの間に，それぞれ同じ比例係数kに関する比例関係

$$\frac{x_{a0}-x_{c0}}{x_{c0}-x_{b0}}=k \quad \frac{x_{a1}-x_{c1}}{x_{c1}-x_{b1}}=k \quad \frac{x_{a2}-x_{c2}}{x_{c2}-x_{b2}}=k$$

が存在するとする。これらの式を書き直し

$$x_{c0}=\frac{x_{a0}+kx_{b0}}{1+k} \quad （オリジナル形状）$$

$$x_{c1}=\frac{x_{a1}+kx_{b1}}{1+k} \quad （ベーシス形状１） \qquad ....（10）$$

$$x_{c2}=\frac{x_{a2}+kx_{b2}}{1+k} \quad （ベーシス形状２）$$

が得られる。また形状変換した新しい形状における３節点ａ，ｂ，ｃのｘ座標は

$$\begin{aligned} x_a &= w_0x_{a0}+w_1x_{a1}+w_2x_{a2} \\ x_b &= w_0x_{b0}+w_1x_{b1}+w_2x_{b2} \\ x_c &= w_0x_{c0}+w_1x_{c1}+w_2x_{c2} \end{aligned} \qquad ....（11）$$

となる。式（10）を式（11）の第３式に代入し整理して

$$x_c=\frac{1}{1+k}\left[(w_0x_{a0}+w_1x_{a1}+w_2x_{a2})+k(w_0x_{b0}+w_1x_{b1}+w_{b2})\right]$$

が得られ，さらに式（11）の第１、２式を代入して

$$x_c=\frac{x_a+kx_b}{1+k} \qquad ....（12）$$

となる。この式は式（10）と一致する。すなわち，オリジナル形状と各ベーシス形状における節点座標の間に同じ比例関係があれば，形状変換した新しい形状における節点の間に重み係数と関係なく常に同じ比例関係を保持することを示している。

実際の形状最適化を行う時に，この関係式を利用し，内孔中心点などの内部特徴点と外部境界との位置関係を便利に調整することができる。

４.３　ベーシス形状変換による角度値の保持

回転ベーシスベクトルによる角度値への影響を調べるため，構造内部にある３節点ａ，ｂ，ｃからなる角度を考え，オリジナル形状とベーシス形状における角度を一致とする。

$$\theta_0=<\overrightarrow{a_0b_0},\overrightarrow{a_0c_0}>=<\overrightarrow{a_1b_1},\overrightarrow{a_1c_1}> \qquad .....（13）$$

ここでは，$<\overrightarrow{a_0b_0},\overrightarrow{a_0c_0}>$はオリジナル形状における３節点からなる角度，すなわちベクトル$\overrightarrow{a_0b_0}$と$\overrightarrow{a_0c_0}$の挟まれる角度である。同様に$<\overrightarrow{a_1b_1},\overrightarrow{a_1c_1}>$はベーシス形状における３節点からなる角度，すなわちベクトル$\overrightarrow{a_1b_1}$と$\overrightarrow{a_1c_1}$の挟まれる角度である。

回転変換からの影響を調べるのは目的とするので，角度を構成する辺長が変化しないとする。

$$\left|\overrightarrow{a_0b_0}\right|=\left|\overrightarrow{a_1b_1}\right|, \quad \left|\overrightarrow{a_0c_0}\right|=\left|\overrightarrow{a_1c_1}\right| \qquad .....（14）$$

またオリジナルからベーシス形状までの回転角度を$\Delta\theta$とする。変換した形状での新しい角度θを構成するベクトルは

$$\overrightarrow{ab}=w_0\overrightarrow{a_0b_0}+w_1\overrightarrow{a_1b_1}$$

$$\overrightarrow{ac}=w_0\overrightarrow{a_0c_0}+w_1\overrightarrow{a_1c_1} \qquad ......（15）$$

となる。式の両側にそれぞれ内積を取る。

$$\overrightarrow{ab}\cdot\overrightarrow{ac}=w_0{}^2\,\overrightarrow{a_0b_0}\cdot\overrightarrow{a_0c_0}+w_1{}^2\,\overrightarrow{a_1b_1}\cdot\overrightarrow{a_1c_1}$$
$$+w_0w_1\left(\overrightarrow{a_0b_0}\cdot\overrightarrow{a_1c_1}+\overrightarrow{a_1b_1}\cdot\overrightarrow{a_0c_0}\right)$$

式（14）を考慮し整理すると

$$\overrightarrow{ab}\cdot\overrightarrow{ac}=\left|\overrightarrow{a_0b_0}\right|\left|\overrightarrow{a_0c_0}\right|\cos\theta_0\left[1-2w_0w_1(1-\cos\Delta\theta)\right] \quad ...（16）$$

が得られる。

一方，ベクトルの内積公式より

$$\overrightarrow{ab}\cdot\overrightarrow{ac}=\left|\overrightarrow{ab}\right|\left|\overrightarrow{ac}\right|\cos\theta \qquad ....（17）$$

がある。式（15）の第１式を両側で自乗を取る。

$$\left|\overrightarrow{ab}\right|^2=w_0{}^2\left|\overrightarrow{a_0b_0}\right|^2+w_1{}^2\left|\overrightarrow{a_1b_1}\right|^2+2w_0w_1\overrightarrow{a_0b_0}\cdot\overrightarrow{a_1b_1}$$

式（14）を考慮し整理すると

$$\left|\overrightarrow{ab}\right|^2=\left|\overrightarrow{a_0b_0}\right|^2\left[1-2w_0w_1(1-\cos\Delta\theta)\right] \qquad .....（18）$$

が得られる。同様に式（15）の第２式から

$$\left|\overrightarrow{ac}\right|^2=\left|\overrightarrow{a_0c_0}\right|^2\left[1-2w_0w_1(1-\cos\Delta\theta)\right] \qquad .....（19）$$

が得られる。式（18）､（19）を式（17）に代入して

$$\overrightarrow{ab}\cdot\overrightarrow{ac}=\left|\overrightarrow{a_0b_0}\right|\left|\overrightarrow{a_0c_0}\right|\cos\theta\left[1-2w_0w_1(1-\cos\Delta\theta)\right] \quad ...（20）$$

となる。式（16）と（20）を比較して

$$\cos\theta=\cos\theta_0 \qquad ....（21）$$

が得られる。式（21）は，ある変更範囲$-90^\circ\le\theta_0\le 90^\circ$以内で，変換した形状での新しい角度$\theta$が重み係数と関係なくオリジナル形状での角度$\theta_0$と一致することを示している。実際の形状最適化を行う時に，式（21）を利用し，構造の任意３点からなる角度値の変化をコントロールすることができる。

５．解析モデルのリメッシング問題

形状最適化では，外部境界形状が変化する時に，繰返し構造解析が正常に行われるために，内部にある解析メッシュを適当に調整し，いわゆるリメッシングする必要がある。

前節に述べた結果に従い，形状最適化計算を実行する前に，オリジナル形状と各ベーシ形状において，対応する要素と要素の位置関係を適当に設定し，また重み係数に課す側面制約条件の許容値を適当に調整すれば，ほとんどの場合は正常に繰返し構造解析を続けられ，ある程度リメッシング問題を解決することができる。

一方，現実問題としては，実際にすべてのベーシスベクトルを生成した後，プリープロセッサー描画機能を使い，重み係数を変えて基本形状の解析メッシュを検査して，もし各基本形状での解析メッシュは大きな問題がなければ，数値計算経験上でほとんどの場合は形状最適化計算が正常に続けられる。ただし，この結果はあくまでも経験的なものであるので，理論的な結論は確立していない。

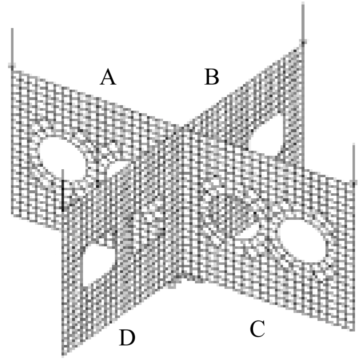
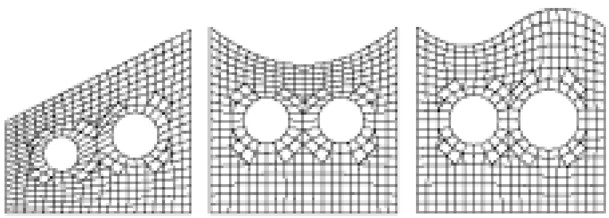
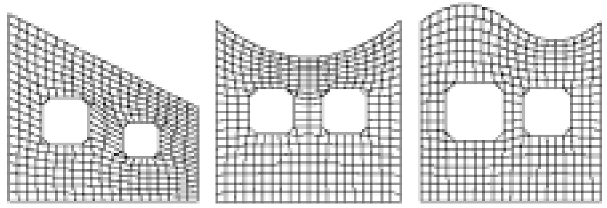


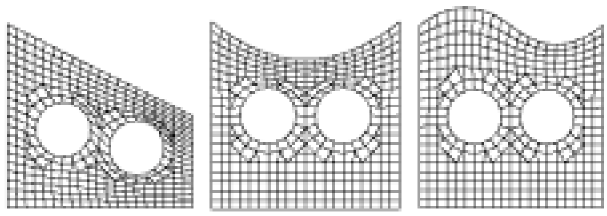
Fig. 4　A 3D plate assembly structure



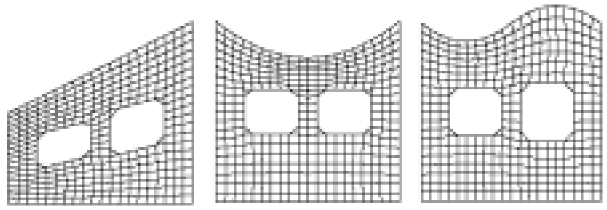
(a) Basis vector 1,2,3 at plate A



(b) Basis vector 4,5,6 at plate B



(c) Basis vector 7,8,9 at plate C



(d) Basis vector 10,11,12 at plate D

Fig. 5　Basis vectors of 3D plate assembly structure

６．数値計算例

図４に示す三次元板組立構造を考える。構造は４枚の板から構成され，中央の下部に拘束する。板の端に４点の集中荷重をかかる。

最適化の目的は荷重点の変位の最小化とする。制約条件は荷重点の応力が 12.0 kgf/mm² 以下、荷重点の撓みが 0.5mm 以下とする。

設計変数は図５に示す 12 個である。それぞれ相対位置関係に要求がかかる。板Ａには，円孔直径が円中心での高さの比は一定とする。板Ｂには，内孔の大きさが孔中心での高さの比は一定とする。板Ｃには，円孔直径が一定とする。板Ｄには，内孔の高さが孔中心での高さの比は一定とする。いずれの内孔中心点は常に両側辺の中心点の連線上に位置する。

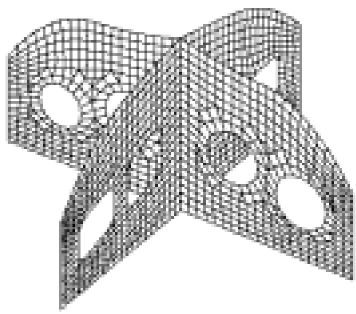


Fig.6　Optimal shape for minimum displacement

最適な形状は図６に示し，外部境界形状と内孔の相対関係要求がすべて満足している。目的変位は初期形状での 0.535mm から 0.316mm まで約 41％減少した。荷重点の応力は初期形状での 12.99 kgf/mm² から 8.36 kgf/mm² まで約 35.6％減少した。これらの結果より，実用的な最適解が求められたことが解った。

７．まとめ

本文は三次元形状最適化にベーシスベクトル法を適用する際に，ベーシスベクトルの独立性検査方法，外部境界形状の変化に伴い内部形状のコントロールおよびリメッシング問題などについて詳細な検討を行った。また，数値例の結果によって提案したアルゴリズムの有効性を明らかにした。

参考文献

(1) 萩原一郎，最適化手法の動向とこれからの方向について，振動騒音の最適化，自動車技術会 1998，p381-388

(2) 日本機械学会，構造・材料の最適設計，技報堂出版社，1989，p126-155

(2) 趙希禄 他，構造最適設計システムの開発について，第 17 回設計シンポジウム，1999，ｐ77-81

(3) 趙希禄 他，構造最適化プログラム 3D FINAL DESIGN の開発と応用，機講論 No.99-27，ｐ169-172

(4) 趙希禄 他，ベーシスベクトル法を用いた三次元構造の形状最適設計，機講論 No.99-7，ｐ139-142